Tests d’hypothèse pour des données d’enquête catégoriques en utilisant des poids bootstrap

Jae-kwang Kim and J.N.K. Rao[1]

Résumé

Les méthodes statistiques classiques qui ne tiennent pas compte comme il convient de la complexité du plan d’échantillonnage peuvent mener à des inférences incorrectes lorsqu’elles sont appliquées à des données d’enquête. En particulier, le taux réel d’erreur de première espèce des tests d’hypothèse fondés sur les tests classiques peut être nettement plus élevé que le niveau nominal. On a proposé des méthodes qui tiennent compte des caractéristiques du plan d’échantillonnage dans les tests d’hypothèse, y compris les tests de Wald et les tests du quasi-score (Rao, Scott et Skinner 1998), qui font intervenir les matrices de covariance estimées des estimations des paramètres. La méthode du bootstrap de Rao et Wu (1983) est appliquée fréquemment à Statistique Canada pour estimer les matrices de covariance en utilisant un fichier de données contenant des colonnes de poids bootstrap. Les progiciels statistiques classiques permettent souvent d’utiliser des statistiques de test pondérées selon le plan d’échantillonnage et il est intéressant d’approximer les lois de ces statistiques sous l’hypothèse nulle par leurs analogues bootstrap calculés au moyen des poids bootstrap fournis dans le fichier de données. Beaumont et Bocci (2009) ont appliqué cette méthode du bootstrap pour tester les hypothèses sur les paramètres de régression sous un modèle de régression linéaire, en utilisant la statistique F pondérée. Dans le présent article, nous exposons une approche unifiée de la méthode susmentionnée consistant à construire des approximations bootstrap de la statistique du rapport de vraisemblance pondéré et de la statistique du quasi-score pondéré. Nous présentons les résultats d’une étude en simulation du test d’indépendance dans un tableau à double entrée de données d’enquête catégoriques. Nous avons étudié la performance de la méthode proposée comparativement à d’autres méthodes, dont la statistique du khi-carré corrigée de Rao-Scott pour les données d’enquête catégoriques.

Mots-clés : Poids bootstrap; test d’indépendance; rapport de vraisemblance pondéré; quasi-score pondéré.

1. Introduction

Le test d’hypothèse est l’un des problèmes fondamentaux de la statistique. Selon l’approche du modèle paramétrique, les tests d’hypothèse statistiques peuvent être réalisés au moyen du test de Wald, du test du rapport de vraisemblance ou du test du score. Dans chaque cas, on calcule une statistique de test que l’on compare ensuite au quantile d’ordre $100\alpha\,\%$ de la loi de référence, qui est la loi limite de la statistique de test sous l’hypothèse nulle. La loi limite est souvent une loi du khi-carré en raison du théorème central limite des estimateurs ponctuels.

Par contre, dans les sondages, les échantillons sont sélectionnés selon des méthodes d’échantillonnage complexes faisant appel à la mise en grappes, la stratification ou la sélection avec probabilités inégales. Si l’on ne tient pas compte des caractéristiques du plan d’échantillonnage dans l’analyse statistique, les erreurs-types sont habituellement sous-estimées. Par conséquent, les taux de couverture associés sont sous-estimés et les niveaux de test sont exagérés. En fait, la loi limite de la statistique de test n’est pas nécessairement une loi du khi-carré. Elle s’exprime plutôt sous la forme d’une somme pondérée de p variables aléatoires indépendantes tirées de la loi $\chi^2(1)$ et les poids dépendent de paramètres inconnus qui sont fonction du plan d’échantillonnage. Pour traiter ce genre de problème, on peut considérer une correction de la statistique de test en vue d’obtenir une loi limite du khi-carré. Cette approche comprend habituellement le calcul de l’effet de plan (Rao et Scott, 1984) sur la statistique de test. Rao, Scott et Skinner (1998) ont utilisé cette approche pour obtenir des tests du quasi-score dans des données d’enquête.

[1] Jae-kwang Kim, Department of Statistics, Iowa State University, Ames, Iowa 50014, U.S.A ; J.N.K. Rao, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada K1S 5B6.

Dans le présent article, nous suivons une approche différente du calcul de la loi limite qui fait appel à un bootstrap paramétrique. L'utilisation du bootstrap pour calculer la loi limite de la statistique de test sous échantillonnage complexe a été discutée par Beaumont et Bocci (2009), mais ces auteurs n'ont pas parlé des extensions au test du rapport de vraisemblance ni au test du score. Nous présentons une approche unifiée de l'utilisation de la méthode du bootstrap pour obtenir la loi limite de la statistique de test sous échantillonnage complexe. Le plan d'échantillonnage peut être informatif. La méthode proposée est présentée dans le contexte du simple test d'adéquation et de celui du test d'indépendance dans un tableau à double entrée de données d'enquête catégoriques.

À la section 2, nous présentons la configuration de base dans le contexte du simple test d'adéquation. À la section 3, nous présentons la méthode proposée et discutons de ses propriétés asymptotiques. À la section 4, nous appliquons la méthode proposée à un test indépendance dans un tableau à double entrée de proportions dans les cellules. À la section 5, nous présentons les résultats d'une étude par simulation limitée. Enfin, à la section 6, nous formulons nos conclusions.

2. Configuration de base

Supposons qu'une population finie U de taille N soit partitionnée en K catégories avec $U = U_1 \cup \cdots \cup U_K$ représentant une telle partition. Soit $p_k = N_k / N$ la proportion de population dans la catégorie k, où $N_k = |U_k|$. De la population finie U, nous tirons un échantillon probabiliste s de taille n, et w_i est le poids d'échantillonnage associé à l'unité $i \in s$. Soit $s_k = s \cap U_k$ la partition de l'échantillon $s = s_1 \cup \cdots \cup s_K$. Partant de l'échantillon, nous calculons $\hat{p}_k = \hat{N}_k / \hat{N}$ en tant qu'estimateur de p_k, où $\hat{N}_k = \sum_{j \in s_k} w_j$ est l'estimateur sans biais sous le plan de N_k et $\hat{N} = \sum_{k=1}^{K} \hat{N}_k = \sum_{i \in s} w_i$.

Au moyen des données de l'échantillon $(\hat{p}_k, k = 1, \cdots, K)$, supposons que nous souhaitions tester $H_0 : p_k = p_{k,0}, k = 1, \cdots, K$, pour les proportions spécifiées $(p_{1,0}, \cdots, p_{K,0})$ satisfaisant $\sum_{k=1}^{K} p_{k,0} = 1$. La statistique de test d'adéquation khi-carré de Pearson pour cette hypothèse est donnée par

$$X^2 = n \sum_{k=1}^{K} \left(\hat{p}_k - p_{k,0} \right)^2 / p_{k,0}.$$

En outre, nous pouvons calculer la statistique TRV (test du rapport de vraisemblance) (en supposant une loi multinomiale) comme il suit

$$G^2 = 2n \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_k \log \left(\frac{\hat{p}_k}{p_{k,0}} \right).$$

En écrivant $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_{K-1})'$ et $\mathbf{p}_0 = (p_{1,0}, \cdots, p_{K-1,0})'$, nous avons, sous H_0,

$$\sqrt{n} (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, V),$$

pour une taille n suffisamment grande, où $V = nV(\hat{\mathbf{p}})$. Sous échantillonnage aléatoire simple (EAS) avec remise, V est égale à $P_0 = diag(\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_0'$. Pour un autre plan d'échantillonnage, l'expression de V est plus compliquée. Sous certaines conditions de régularité, selon Rao et Scott (1981),

$$X^2, G^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{K-1} \lambda_i Z_i^2, \tag{1}$$

sous H_0, où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{K-1}$ sont les valeurs propres de la matrice d'effets de plan $\mathbf{D} = P_0^{-1} V$, $Z_1, \cdots, Z_{K-1} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$, et $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en loi. Sous EAS, puisque $V = P_0$, la loi limite en (1) se réduit à la loi du χ^2 à $K - 1$ degrés de liberté.

Sous un plan d'échantillonnage en grappes à deux degrés avec $\lambda_i = \lambda(>1)$, le taux d'erreur de première espèce (ou de type 1) est approximativement égal à $Pr\{X_{k-1}^2 > \lambda^{-1}\chi_{k-1}^2(\alpha)\}$ qui augmente avec λ et peut donc être rendu arbitrairement grand en faisant croître λ. Pour contourner ce problème, Rao et Scott (1981) ont proposé une correction d'ordre un consistant à traiter $X^2(\hat{\lambda}_+) = X^2 / \hat{\lambda}_+$ comme χ_{k-1}^2 sous H_0, où

$$\hat{\lambda}_+ = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{\hat{p}_i}{p_{0i}}(1-\hat{p}_i)\hat{d}_i$$

et $\hat{d}_i$ = l'effet de plan (deff) estimé de $\hat{p}_i$. La correction de Rao-Scott d'ordre deux (Rao et Scott, 1981) nécessite de connaître la matrice de covariance estimée complète des proportions estimées, mais elle ne fait pas intervenir l'inversion de la matrice de covariance, contrairement à la statistique de Wald. Dans STATA et d'autres progiciels de traitement des données d'enquête, les corrections de Rao-Scott servent d'option par défaut.

3. Méthode bootstrap proposée

Nous proposons maintenant une nouvelle méthode fondée sur la procédure bootstrap dans le cas des sondages. L'application de la méthode bootstrap aux sondages a été discutée principalement dans le contexte de l'estimation de la variance par rééchantillonnage (Rao et Wu, 1988; Rao, Wu et Yue, 1992). Pour le bootstrap, nous utilisons un fichier de données qui contient les variables de réponse, les poids d'échantillonnage finaux w_i et les poids de rééchantillonnage bootstrap finaux $w_i^*(b), b = 1,\cdots,B$. Habituellement, $B = 500$ colonnes de poids bootstrap sont communiquées.

Pour la procédure de test bootstrap proposée, nous utilisons l'échantillon bootstrap pour approximer la loi limite donnée en (1), sans devoir calculer la matrice des effets de plan. Pour décrire la méthode proposée, soit $\hat{\mathbf{p}}^*$ l'estimateur de $\mathbf{p}$ fondé sur les poids bootstrap w_i^* et $\hat{V}$, l'estimateur convergent sous le plan de V. Sous échantillonnage à plusieurs degrés stratifié, nous supposons que les UPE dans les strates sont tirées avec remise ou que la fraction d'échantillonnage des UPE est négligeable. La statistique bootstrap proposée pour les statistiques de test d'adéquation X^2 et G^2 sont

$$X^{2*} = n\sum_{i=1}^{K}(\hat{p}_i^* - \hat{p}_i)^2 / \hat{p}_i$$
$$G^{2*} = 2n\sum_{i}\hat{p}_i^* \log\left(\hat{p}_i^* / \hat{p}_i\right),$$

respectivement. Notons que nous n'utilisons pas p_{0i} à la place de $\hat{p}_i$ dans les statistiques de test bootstrap.

Le théorème qui suit donne les propriétés asymptotiques de la statistique de test bootstrap proposée.
Théorème 1 *Sous* H_0,

$$X^{2*}, G^{2*} \xrightarrow{\mathcal{L}^*} \sum_{i=1}^{K-1}\hat{\lambda}_i Z_i^2 \tag{2}$$

où $\hat{\lambda}_1 \le \cdots \le \hat{\lambda}_{K-1}$ *sont les valeurs propres de la matrice des effets de plan estimés* $\hat{P}^{-1}\hat{V}$, $Z_1,\cdots,Z_{K-1} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$, *et* $\xrightarrow{\mathcal{L}^*}$ *désigne la convergence en loi bootstrap*.
Une esquisse de preuve du théorème 1 est présentée à l'annexe A.

Notons que la loi limite en (2) est asymptotiquement la même que la loi limite en (1). Donc, nous pouvons utiliser les échantillons bootstrap pour approximer la loi de la statistique de test dans l'échantillon. Autrement dit, partant de l'histogramme de B statistiques bootstrap $X^{*2}(1),\cdots,X^{*2}(B)$, trouver la valeur supérieure de α et rejeter H_0

si le X^2 observé dépasse cette valeur. De même, la statistique du rapport de vraisemblance G^2 peut être utilisée en calculant les statistiques bootstrap correspondantes $G^{*2}(1),\cdots,G^{*2}(B)$.

4. Test d'indépendance

Nous discutons maintenant du test d'indépendance dans des tableaux à double entrée. Soit $p_{ij} = N_{ij} / N$ la proportion dans la population pour la cellule (i, j) avec les valeurs de marge p_{i+} et p_{+j} , où $\{N_{ij}; i = 1,\cdots,R, j = 1,\cdots,C\}$ est l'ensemble de chiffres de population avec les valeurs de marge N_{i+} et N_{+j}. Soit $\hat{N}_{ij}$ un estimateur sans biais sous le plan de N_{ij} et $\hat{p}_{ij} = \hat{N}_{ij} / \hat{N}$. Les statistiques de test X^2 et G^2 pour tester $H_0 : p_{ij} = p_{i+}p_{+j}$ pour tous i et j sont données par

$$X_I^2 = n\sum_i\sum_j \frac{(\hat{p}_{ij} - \hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})^2}{\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}} \tag{3}$$

$$G_I^2 = 2n\sum_i\sum_j \hat{p}_{ij} \log\left\{\frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}}\right\}.$$

Rao et Scott (1981) ont montré que, sous H_0, en écrivant $d = (R-1)(C-1)$,

$$X_I^2, G_I^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{l=1}^{d} \delta_l Z_l^2 \tag{4}$$

où $\delta_1 \le \cdots \le \delta_d$ sont les d valeurs propres d'une matrice d'effets de plan (voir l'annexe B) et $Z_1,\cdots,Z_d \overset{iid}{\sim} N(0,1)$.

La correction d'ordre un de Rao-Scott appliquée à X_I^2 peut s'écrire $X_I^2(\hat{\delta}_+) = X_I^2 / \hat{\delta}_+$ traitée comme χ^2 avec $(R-1)(C-1)$ degrés de liberté sous H_0, où $(R-1)(C-1)\hat{\delta}_+ = \sum_l \hat{\delta}_l$ nécessite seulement les deffs de cellule et les deffs de marge des lignes et des colonnes (Rao et Scott, 1984). Les tableaux à double entrée devraient contenir ces deffs en plus des fréquences ou des proportions estimées par cellule et leurs valeurs de marge. Rao et Scott (1984) ont fourni une théorie unifiée pour les modèles log-linéaires en vue de couvrir les tableaux à entrées multiples et d'autres extensions.

Considérons maintenant les tests bootstrap de H_0 dans ce cas. Soit $\hat{p}_{ij}^*$ les proportions de cellule bootstrap calculées en utilisant les poids bootstrap. Définissons $\hat{p}_{i+}^* = \sum_j \hat{p}_{ij}^*$ et $\hat{p}_{+j}^* = \sum_i \hat{p}_{ij}^*$. La version bootstrap proposée de $X_I^2 = n\sum_i\sum_j (\hat{p}_{ij} - \hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})^2 / (\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})$ est donnée par

$$X_I^{2*} = n\sum_i\sum_j \frac{\{(\hat{p}_{ij}^* - \hat{p}_{i+}^*\hat{p}_{+j}^*) - (\hat{p}_{ij} - \hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})\}^2}{(\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})}$$

Notons que, sous H_0 , les termes du numérateur du X^2 dans l'échantillon sont identiques à $\{(\hat{p}_{ij} - \hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}) - (p_{ij} - p_{i+}p_{+j})\}^2$. Autrement dit, la statistique de test bootstrap est calculée en remplaçant simplement $\{\hat{p}_{ij}, \hat{p}_{i+}, \hat{p}_{+j}\}$ et $\{p_{ij}, p_{i+}, p_{+j}\}$ par $\{\hat{p}_{ij}^*, \hat{p}_{i+}^*, \hat{p}_{+j}^*\}$ et $\{\hat{p}_{ij}, \hat{p}_{i+}, \hat{p}_{+j}\}$, respectivement.

Soit $\Delta_{ij} = p_{ij} / (p_{i+} p_{+j})$, alors sous H_0, $\Delta_{ij} = 1$ et nous pouvons exprimer

$$G_I^2 = 2n\sum_i\sum_j\left[\hat{p}_{ij}\log\left\{\frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}\Delta_{ij}}\right\} - (\hat{p}_{ij} - \hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j}\Delta_{ij})\right].$$

La version bootstrap G^{2*} s'obtient maintenant en remplaçant $\{\hat{p}_{ij}, \hat{p}_{i+}, \hat{p}_{+j}\}$ par $\{\hat{p}^*_{ij}, \hat{p}^*_{i+}, \hat{p}^*_{+j}\}$, et Δ_{ij} par $\hat{\Delta}_{ij}$. D'où, la version bootstrap proposée de G_I^2 est donnée par

$$G_I^{2*} = 2n\sum_i\sum_j\left[\hat{p}^*_{ij}\log\left\{\frac{\hat{p}^*_{ij}}{\hat{p}^*_{i+}\hat{p}^*_{+j}\hat{\Delta}_{ij}}\right\} - (\hat{p}^*_{ij} - \hat{p}^*_{i+}\hat{p}^*_{+j}\hat{\Delta}_{ij})\right]$$

où $\hat{\Delta}_{ij} = \hat{p}_{ij} / (\hat{p}_{i+}\hat{p}_{+j})$. Notons que G_I^{2*} est toujours non négative.

Le théorème qui suit donne certaines propriétés asymptotiques de la statistique de test bootstrap proposée.

Théorème 2 *Sous* H_0,

$$X_I^{2*}, G_I^{2*} \xrightarrow{\mathcal{L}^*} \sum_{i=1}^d \hat{\delta}_i Z_i^2 \tag{5}$$

où $\hat{\delta}_1 \le \cdots \le \hat{\delta}_d$ *sont les valeurs propres de la matrice des effets de plan estimés qui converge en probabilité vers la matrice des effets de plan correspondant aux valeurs propres* $\delta_i, i = 1, \cdots, (R-1)(C-1)$.

Une esquisse de preuve du théorème 2 est présentée à l'annexe B.

En vertu du théorème 2, nous pouvons utiliser la loi bootstrap pour approximer la loi en échantillon de la statistique de test X_I^2 ou G_I^2. C'est-à-dire, partant de l'histogramme de B statistiques bootstrap $X_I^{*2}(1), \cdots, X_I^{*2}(B)$, trouver la valeur supérieure de α et rejeter H_0 si le X_I^2 observé excède cette valeur. De même, la statistique du rapport de vraisemblance G_I^2 peut être utilisée en calculant les statistiques bootstrap correspondantes $G_I^{*2}(1), \cdots, G_I^{*2}(B)$.

5. Étude en simulation

Nous avons procédé à une étude en simulation limitée d'un test d'indépendance pour vérifier la performance de la méthode du bootstrap sous échantillonnage en grappes. Dans l'étude en simulation, nous avons généré $n = 50$ grappes, chacune de taille $m = 20$. Nous avons considéré $R = 3$ lignes et $C = 3$ colonnes. Sachant p_{ij}, les échantillons sont tirés en deux étapes :

1. Pour chaque grappe i, sachant $\mathbf{p} = (p_{11}, \cdots, p_{33})'$, générer $\mathbf{p}_i$ en partant d'une loi de Dirichlet de paramètre $C\mathbf{p}$, où C doit être déterminé par un effet de plan commun δ.
2. En utilisant $\mathbf{p}_i$ obtenue à l'étape 1, générer les fréquences de cellule pour la grappe i à partir d'une loi multinomiale avec une taille d'échantillon m et une probabilité $\mathbf{p}_i$.

Sous cette procédure, nous avons $\delta = 1 + (m-1)/(C+1)$. Nous posons que $\delta = 1{,}2$ et 3.

Pour le paramètre $\mathbf{p}$, nous avons considéré quatre scénarios :

1. Cas 1 : $p_{11} = 1/4, p_{12} = p_{13} = p_{21} = p_{31} = 1/8, p_{22} = p_{23} = p_{32} = p_{33} = 1/16$.
2. Cas 2 : $p_{11} = 1/4, p_{12} = p_{13} = (1{,}2)/8$, $p_{21} = p_{31} = (0{,}8)/8$, $p_{22} = p_{33} = 1/16$, $p_{23} = (1{,}2)/16, p_{32} = (0{,}8)/16$.

3. Cas 3 : $p_{11} = 1/4, p_{12} = p_{13} = (1,4)/8$, $p_{21} = p_{31} = (0,6)/8$, $p_{22} = p_{33} = 1/16$, $p_{23} = (1,4)/16, p_{32} = (0,6)/16$.
4. Cas 4 : $p_{11} = 1/4, p_{12} = p_{13} = (1,5)/8$, $p_{21} = p_{31} = (0,5)/8$, $p_{22} = p_{33} = 1/16$, $p_{23} = (1,5)/16, p_{32} = (0,5)/16$.

Dans le cas 1, le tableau à double entrée satisfait l'indépendance. Les cas 2 à 4 ne satisfont pas l'hypothèse d'indépendance et le seuil de non-indépendance peut être exprimé en utilisant un paramètre de non-centralité γ, donné par

$$\gamma = mn\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{C}\frac{(p_{ij} - p_{i+}p_{+j})^2}{p_{i+}p_{+j}}.$$

Les valeurs de γ sont $0{,}0,\ 2{,}6,\ 11{,}7,\ 19{,}9$ pour le cas 1, le cas 2, le cas 3, le cas 4, respectivement. Pour chaque échantillon, nous avons considéré 4 procédures de test :

1. Pearson naïf : Rejeter H_0 si $X_I^2 > \chi_4^2(0{,}95)$, où $\chi_4^2(0{,}95)$ est le point correspondant aux $5\,\%$ supérieurs de la loi du χ^2 à 4 degrés de liberté.
2. Rapport de vraisemblance (RV) naïf : Rejeter H_0 si $G_I^2 > \chi_4^2(0{,}95)$.
3. Pearson bootstrap : Rejeter H_0 si $X_I^2 > q_1^*(0{,}95)$, où $q_1^*(0{,}95)$ est le 95e quantile de la loi bootstrap de X_I^{2*}.
4. Rapport de vraisemblance bootstrap : Rejeter H_0 si $G_I^2 > q_2^*(0{,}95)$, où $q_2^*(0{,}95)$ est le 95e quantile de la loi bootstrap de G_I^{2*}.

Pour calculer les quantiles bootstrap, nous avons utilisé $B = 5\,000$ échantillons bootstrap. Les résultats des simulations sont présentés au tableau 1.

Le tableau 1 donne la taille $(\gamma = 0)$ et la puissance des quatre procédures de test, en utilisant $R = 1\,000$ échantillons simulés Monte Carlo. Sous H_0, les tailles des quatre tests sont similaires et proches de la taille nominale, le seuil $\alpha = 0{,}05$, en l'absence d'effet de plan $(\delta = 1)$. Par ailleurs, pour $\delta = 2$ et 3, les X^2 et G^2 naïfs donnent des tailles gonflées qui augmentent avec δ, comme prévu. Les tests bootstrap proposés montrent une taille de test valide sous H_0 même quand l'effet de plan est supérieur à 1. La puissance des tests bootstrap proposés augmente avec γ.

Tableau 1 : Puissance des procédures de test d'indépendance basée sur 1 000 échantillons provenant d'une simulation Monte Carlo

Effet de plan	Méthode	Cas 1 ($\gamma = 0$)	Cas 2 ($\gamma = 2,6$)	Cas 3 ($\gamma = 11,7$)	Cas 4 ($\gamma = 19,9$)
1	Pearson naïf	0,050	0,220	0,799	0,972
	RV naïf	0,051	0,227	0,804	0,971
	Pearson bootstrap	0,063	0,219	0,800	0,970
	RV bootstrap	0,060	0,216	0,801	0,967
2	Pearson naïf	0,304	0,449	0,818	0,951
	RV naïf	0,309	0,449	0,819	0,952
	Pearson bootstrap	0,047	0,113	0,516	0,749
	RV bootstrap	0,051	0,117	0,520	0,751
3	Pearson naïf	0,543	0,643	0,864	0,948
	RV naïf	0,546	0,646	0,864	0,948
	Pearson bootstrap	0,062	0,094	0,295	0,536
	RV bootstrap	0,070	0,105	0,304	0,540

6. Conclusion

Nous prévoyons étendre notre méthode bootstrap à des tests pour des tableaux de fréquences ou de proportions à entrées multiples, en utilisant une approche de modèle log-linéaire. Nous prévoyons aussi élaborer des tests bootstrap pour le modèle de régression logistique et d'autres modèles, en utilisant les approches du rapport de pseudo-vraisemblance et du quasi-score (Rao, Scott et Skinner, 1998).

Bibliographie

Beaumont, J.-F. and Bocci, C. (2009). A practical bootstrap method for testing hypothesis from survey data. *Survey Methodology*, **35**, 25–35.

Rao, J. N. K. and Scott, A. J. (1981). The analysis of categorical data from complex sample surveys: Chi-Squared tests for goodness of fit and independence in two-way tables. *Journal of the American Statistical Association*, **76**, 221–230.

Rao, J. N. K. and Scott, A. J. (1984). On chi-squared tests for multistage contingency tables with cell proportions estimated from survey data. *Annals of Statistics*, **12**, 46–60.

Rao, J. N. K., Scott, A. J., and Skinner, C. J. (1998). Quasi-score tests with survey data. *Statistica Sinica*, **8**, 1059–1070.

Rao, J. N. K. and Wu, C. F. J. (1988). Resampling inference with complex survey data. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 231–241.

Rao, J. N. K., Wu, C. F. J., and Yue, K. (1992). Some recent work on resampling methods for complex surveys. *Survey Methodology*, **18**, 209–217.

Annexe A: Preuve du théorème 1

La statistique khi-carré d'adéquation X^2 peut être exprimée sous la forme

$$X^2 = n(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0)' \mathbf{P}_0^{-1} (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0). \tag{6}$$

En utilisant la représentation matricielle (6) de X^2 et en notant que $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbf{V})$ sous H_0, le résultat (1) pour X^2 découle de l'application des résultats classiques à la loi des formes quadratiques (Rao et Scott, 1981). Le résultat (1) pour G^2 peut être obtenu en notant que X^2 et G^2 sont asymptotiquement équivalentes sous H_0 .

Passons maintenant à la statistique khi-carré bootstrap X^{2*} que nous pouvons exprimer sous la forme

$$X^{2*} = (\hat{\mathbf{p}}^* - \hat{\mathbf{p}})' \hat{\mathbf{P}}_0^{-1} (\hat{\mathbf{p}}^* - \hat{\mathbf{p}}) \tag{7}$$

où $\hat{\mathbf{P}}_0 = diag(\hat{\mathbf{p}}) - \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'$. Pour l'échantillonnage à plusieurs degrés stratifié avec tirage des UPE avec remise dans les strates, nous avons

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}}^* - \hat{\mathbf{p}}) \xrightarrow{\mathcal{L}^*} N(0, \hat{V}) \tag{8}$$

sous la méthode bootstrap de Rao-Wu (1988). Il découle maintenant de (7) et (8) que l'expression (2) est vérifiée. Les résultats (2) pour G^{2*} sont également vérifiés, en notant que X^{*2} et G^{*2} sont asymptotiquement équivalentes par rapport à la loi bootstrap.

Annexe B : Preuve du théorème 2

Nous présentons une brève justification de la méthode bootstrap proposée pour tester l'indépendance dans un tableau à double entrée de proportions ou de fréquences de cellule. En utilisant la notation de Rao et Scott (1981), soit $\mathbf{h}(\mathbf{p})$ le vecteur de dimension $d = (R-1)(C-1)$ contenant les éléments $h_{ij}(\mathbf{p}) = p_{ij} - p_{i+}p_{+j}$, $i = 1,\cdots,R-1;\ j = 1,\cdots,C-1$, où $\mathbf{p} = (p_{11}, p_{12},\cdots, p_{RC-1})'$. Alors, sous H_0, la statistique khi-carré X_I^2 peut être exprimée sous forme matricielle par

$$X_I^2 = n\{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{h}(\mathbf{p})\}'(\hat{\mathbf{P}}_{R+}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{P}}_{+C}^{-1})\{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{h}(\mathbf{p})\},$$

où $\hat{\mathbf{P}}_{R+} = diag(\hat{\mathbf{p}}_{R+}) - \hat{\mathbf{p}}_{R+}\hat{\mathbf{p}}_{R+}'$ et $\hat{\mathbf{P}}_{+C} = diag(\hat{\mathbf{p}}_{+C}) - \hat{\mathbf{p}}_{+C}\hat{\mathbf{p}}_{+C}'$ avec $\hat{\mathbf{p}}_{R+} = (\hat{p}_{1+},\cdots, \hat{p}_{R-1,+})'$ et $\hat{\mathbf{p}}_{+C} = (\hat{p}_{+1},\cdots, \hat{p}_{+,C-1})'$ et $\otimes$ désigne un produit direct. Or, en notant que $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$, il s'ensuit que

$$\sqrt{n}\{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}) - \mathbf{h}(\mathbf{p})\} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mathbf{0}, \mathbf{HVH}'),$$

où $\mathbf{H} = \partial \mathbf{h}(\mathbf{p}) / \partial \mathbf{p}'$ est la matrice de dimensions $d \times (RC-1)$ des dérivées partielles de $\mathbf{h}(\mathbf{p})$. En utilisant le résultat susmentionné, nous obtenons (4) où les $\delta_l\ (l = 1,\cdots,d)$ sont les valeurs propres de la matrice des effets de plan $\mathbf{D}_h = \left(\mathbf{P}_{R+}^{-1} \otimes \mathbf{P}_{+C}^{-1}\right)(\mathbf{HVH}')$.

En passant à la méthode bootstrap proposée, nous pouvons exprimer la version bootstrap de X_I^2 sous forme matricielle par

$$X_I^{2*} = n\{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}^*) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}})\}'(\hat{\mathbf{P}}_{R+}^{*-1} \otimes \hat{\mathbf{P}}_{+C}^{*-1})\{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}^*) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}})\}.$$

Or, en notant que

$$\sqrt{n}\left\{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}}^*) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{p}})\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}^*} N(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{H}}'),$$

la représentation (5) de X_I^{2*} est vérifiée, les $\hat{\delta}_l$ étant les valeurs propres de la matrice des effets de plan estimés $\hat{\mathbf{D}}_h = (\hat{\mathbf{P}}_{R+}^{-1} \otimes \hat{\mathbf{P}}_{+C}^{-1})(\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{H}}')$. Maintenant, en utilisant $\hat{\mathbf{D}}_h \to_p \mathbf{D}_h$, il découle que $\hat{\delta}_l \to_p \delta_l, l = 1,\cdots,d$ et la loi limite de X_I^{*2} est la même que la loi limite en (4).